UNIVERSITY OF CRETE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND APPLIED MATHEMATICS
APPLIED ALGEBRA - MEM244 (FALL SEMESTER 2018-19)
LECTURER: G. KAPETANAKIS

1st set

Exercise 1. Let a be an element of finite order k in the multiplicative group G. Show that for $m \in \mathbb{Z}$ we have $a^m = e$ if and only if $k \mid m$, where e stands for the identity element of G.

Exercise 2. Let R be a commutative ring with a unit that does not have any zero-divisors. Show that $\mathrm{char} R = 0$ or p, where p is a prime number. Deduce that a finite field has prime characteristic.

Exercise 3. Take $n > 1$ a square-free integer and the integral domain $\mathbb{Z}[\sqrt{-n}] := \{a + b\sqrt{-n} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. Show that $\mathbb{Z}[\sqrt{-n}]^* = \{\pm 1\}$.

Exercise 4. Take n as in Exercise 3. In addition, assume that n is not a prime and take p a prime divisor of n.

1. Show that p is not a prime in $\mathbb{Z}[\sqrt{-n}]$.
2. Show that p is irreducible in $\mathbb{Z}[\sqrt{-n}]$.

Exercise 5. Take n as in Exercise 3. In addition, assume that $n + 1$ is not a prime and take p a prime divisor of $n + 1$.

1. Show that p is not a prime in $\mathbb{Z}[\sqrt{-n}]$.
2. Show that p is irreducible in $\mathbb{Z}[\sqrt{-n}]$.

Exercise 6. Take $n > 2$ a square-free integer. Show that $\mathbb{Z}[\sqrt{-n}]$ is not a principal ideal domain.

Exercise 7. Let R be a commutative ring with a unit. Show that

$$R[X]/\langle X^4 + X^3 + X + 1 \rangle$$

is not a field.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΑΛΓΕΒΡΑ - ΜΕΜ244 (ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2018-19)
ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Γ. ΚΑΠΕΤΑΝΑΚΗΣ

1ο σετ ασκήσεων

Άσκηση 1. Έστω a στοιχείο πεπερασμένης τάξης k της πολλαπλασιαστικής ομάδας G. Δείξτε ότι για το $m \in \mathbb{Z}$ έχουμε ότι $a^m = e$ αν και μόνο αν $k \mid m$, όπου e το μοναδιαίο στοιχείο της G.

Άσκηση 2. Έστω R αντιμεταθετικός δακτύλιος με μονάδιαίο, τέτοιος ώστε δεν υπάρχουν μηδενοδιαιρέτες. Δείξτε ότι $\mathrm{char} R = 0$ ή p, όπου p πρώτος. Συμπεράνετε ότι ένα πεπερασμένο σώμα έχει πρώτη χαρακτηριστική.

Άσκηση 3. Πάρε $n > 1$ έναν ελεύθερο τετραγώνων ακέραιο και την ακέραια περιοχή $\mathbb{Z}[\sqrt{-n}] := \{a + b\sqrt{-n} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. Δείξτε ότι $\mathbb{Z}[\sqrt{-n}]^* = \{\pm 1\}$.

Άσκηση 4. Πάρε n όπως στην Άσκηση 3. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι ο n δεν είναι πρώτος και ότι ο p είναι πρώτος διαιρέτης του n.

1. Δείξτε ότι ο p δεν είναι πρώτο στοιχείο του $\mathbb{Z}[\sqrt{-n}]$.
2. Δείξτε ότι ο p είναι ανάγωγο στοιχείο του $\mathbb{Z}[\sqrt{-n}]$.

Άσκηση 5. Πάρε n όπως στην Άσκηση 3. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι ο $n + 1$ δεν είναι πρώτος και ότι ο p είναι πρώτος διαιρέτης του $n + 1$.

1. Δείξτε ότι ο p δεν είναι πρώτο στοιχείο του $\mathbb{Z}[\sqrt{-n}]$.
2. Δείξτε ότι ο p είναι ανάγωγο στοιχείο του $\mathbb{Z}[\sqrt{-n}]$.

Άσκηση 6. Έστω $n > 2$ ακέραιος ελεύθερος τετραγώνων. Δείξτε ότι ο $\mathbb{Z}[\sqrt{-n}]$ δεν είναι περιοχή κυρίων ιδεωδών.

Άσκηση 7. Έστω R αντιμεταθετικός δακτύλιος με μονάδα. Δείξτε ότι ο

$$R[X]/\langle X^4 + X^3 + X + 1 \rangle$$

δεν είναι σώμα.