



ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ – ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2019

1. Δείξτε ότι για κάθε  $n \geq 3$  υπάρχουν  $n$  διαφορετικοί ανά δύο διαιρέτες του  $n!$ , τέτοιοι ώστε το άθροισμά τους να ισούται με  $n!$ .

Υπόδ.: Αποδείξτε την ισχυρότερη πρόταση ότι ένας εκ των παραπάνω διαιρετών είναι το 1. (1)

2. Πόσοι εξαψήφιοι θετικοί ακέραιοι αριθμοί υπάρχουν με τους παρακάτω περιορισμούς;

(α') Κάθε ψηφίο είναι διαφορετικό. (0,5)

(β') Κάθε ψηφίο είναι διαφορετικό και ο αριθμός είναι άρτιος. (0,5)

(γ') Το άθροισμα των ψηφίων ισούται με 10 ή ο αριθμός είναι πολλαπλάσιο του 10. (0,5)

(δ') Το άθροισμα των ψηφίων τους ισούται με 15. (0,5)

(ε') Τα ψηφία είναι ανά δύο (όχι όμως ανά τέσσερα) ίδια. (0,5)

3. Αποδείξτε με συνδυαστικό επιχείρημα την ταυτότητα

$$\sum_{k=0}^n \binom{r}{k} \binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n}.$$

Υπόδ.: Με πόσους τρόπους μπορώ να διαλέξω  $n$  στοιχεία προερχόμενα από δύο σύνολα μεγέθους  $r$  και  $s$  αντίστοιχα; (1)

4. Δίνεται ότι  $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ . Βρείτε κλειστό τύπο για την ακολουθία  $a_k = 3a_{k-1} + 4^{k-1}$  για  $k \geq 1$ , με αρχική συνθήκη  $a_0 = 1$ . (1,5)

5. Σχεδιάστε ή περιγράψτε ένα απλό γράφημα με τους παρακάτω βαθμούς κορυφών. Αν δεν υπάρχει τέτοιο γράφημα, εξηγήστε το γιατί. Έπειτα εξηγήστε αν το γράφημα αυτό (όταν υπάρχει) έχει μονοπάτι ή κύκλο Euler.

(α') 0, 1, 2, 3, 4, 4 (0,5)

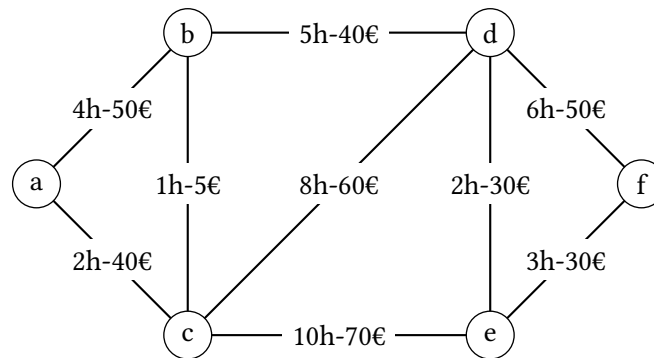
(β')  $\underbrace{3, \dots, 3}_{n \text{ φορές}}$  (0,5)

(γ')  $\underbrace{n, \dots, n}_{m \text{ φορές}}, \underbrace{m, \dots, m}_{n \text{ φορές}}$  (0,5)

(δ') 4, 4, 4, 3, 3, 2, 2 (0,5)

6. Αποδείξτε ότι ένα δέντρο  $n \geq 3$  κορυφών έχει το πολύ  $n-1$  φύλλα. Σχεδιάστε ένα δέντρο με 7 κορυφές και 6 φύλλα. (1)

7. Στο παρακάτω γράφημα αποτυπώνονται η διάρκεια και το κόστος της αντίστοιχης διαδρομής.



Χρησιμοποιείστε τον αλγόριθμο του Dijkstra για να βρείτε

(α') την συντομότερη και (1)

(β') την οικονομικότερη (1)

διαδρομή από την πόλη a στην πόλη f. Σημειώστε με κάποιον τρόπο τα βήματα των αλγορίθμων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

1. Ο αριθμός στην παρένθεση στο τέλος κάθε θέματος/ερωτήματος συμβολίζει την βαθμολογία του. Η μέγιστη βαθμολογία είναι 11 και άριστα είναι το 10.
2. Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2,5 ώρες και μπορείτε να αποχωρίσετε από την αίθουσα το νωρίτερο 30 λεπτά μετά την αρχή της εξέτασης.
3. Κατά την διάρκεια της εξέτασης δεν επιτρέπεται να έχετε πάνω σας ή δίπλα σας τσάντες, σημειώσεις, βιβλία ή ηλεκτρονικές συσκευές (αριθμομηχανές, κινητά, ταμπλέτες, φορητούς υπολογιστές κτλ.).