

UNIVERSITY OF CRETE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND APPLIED MATHEMATICS
APPLIED ALGEBRA - MEM244 (FALL SEMESTER 2019-20)
LECTURER: G. KAPETANAKIS

1st exercise set

Exercise 1. Let a be an element of finite order k in the multiplicative group G . Show that for $m \in \mathbb{Z}$ we have $a^m = e$ if and only if $k \mid m$, where e stands for the identity element of G .

Exercise 2. For a commutative ring of prime characteristic p , show that

$$(a_1 + \cdots + a_s)^{p^n} = a_1^{p^n} + \cdots + a_s^{p^n}$$

for all $a_1, \dots, a_s \in R$ and $n \in \mathbb{N}$.

Exercise 3. Let R be a commutative ring with a unit that does not have any zero-divisors. Show that $\text{char} R = 0$ or p , where p is a prime number. Deduce that a finite field has prime characteristic.

Exercise 4. Take $n > 1$ a square-free integer and the integral domain $\mathbb{Z}[\sqrt{-n}] := \{a + b\sqrt{-n} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. Show that $\mathbb{Z}[\sqrt{-n}]^* = \{\pm 1\}$.

Exercise 5. Take n as in Exercise 4. In addition, assume that n is not a prime and take p a prime divisor of n .

1. Show that p is not a prime in $\mathbb{Z}[\sqrt{-n}]$.
2. Show that p is irreducible in $\mathbb{Z}[\sqrt{-n}]$.

Exercise 6. Take n as in Exercise 4. In addition, assume that $n + 1$ is not a prime and take p a prime divisor of $n + 1$.

1. Show that p is not a prime in $\mathbb{Z}[\sqrt{-n}]$.
2. Show that p is irreducible in $\mathbb{Z}[\sqrt{-n}]$.

Exercise 7. Take $n > 2$ a square-free integer. Show that $\mathbb{Z}[\sqrt{-n}]$ is not a principal ideal domain.

Exercise 8. Let R be a commutative ring with a unit. Show that

$$R[X]/\langle X^6 - X^5 + X - 1 \rangle$$

is not a field.

Exercise 9. 1. Find all the genuine ideals $I \trianglelefteq \mathbb{Z}$, such that $\langle 24 \rangle \subseteq I$. Which of those are maximal?

2. Find all the genuine ideals $I \trianglelefteq \mathbb{Q}[x]$, such that $\langle x^3 - 4x^2 + 5x - 2 \rangle \subseteq I$. Which of those are maximal?

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΑΛΓΕΒΡΑ - ΜΕΜ244 (ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2019-20)
ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Γ. ΚΑΠΕΤΑΝΑΚΗΣ

1ο σετ ασκήσεων

Άσκηση 1. Έστω a στοιχείο πεπερασμένης τάξης k της πολλαπλασιαστικής ομάδας G . Δείξτε ότι για το $m \in \mathbb{Z}$ έχουμε ότι $a^m = e$ αν και μόνο αν $k \mid m$, όπου e το μοναδιαίο στοιχείο της G .

Άσκηση 2. Για έναν μεταθετικό δακτύλιο πρώτης χαρακτηριστικής p , δείξτε ότι

$$(a_1 + \dots + a_s)^{p^n} = a_1^{p^n} + \dots + a_s^{p^n}$$

για κάθε $a_1, \dots, a_s \in R$ και $n \in \mathbb{N}$.

Άσκηση 3. Έστω R αντιμεταθετικός δακτύλιος με μοναδιαίο, τέτοιος ώστε δεν υπάρχουν μηδενοδιαίρετες. Δείξτε ότι $\text{char} R = 0$ ή p , όπου p πρώτος. Συμπεράνετε ότι ένα πεπερασμένο σώμα έχει πρώτη χαρακτηριστική.

Άσκηση 4. Πάρε $n > 1$ έναν ελεύθερο τετραγώνων ακέραιο και την ακέραια περιοχή $\mathbb{Z}[\sqrt{-n}] := \{a + b\sqrt{-n} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. Δείξτε ότι $\mathbb{Z}[\sqrt{-n}]^* = \{\pm 1\}$.

Άσκηση 5. Πάρε n όπως στην Άσκηση 4. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι ο n δεν είναι πρώτος και ότι ο p είναι πρώτος διαιρέτης του n .

1. Δείξτε ότι ο p δεν είναι πρώτο στοιχείο του $\mathbb{Z}[\sqrt{-n}]$.
2. Δείξτε ότι ο p είναι ανάγωγο στοιχείο του $\mathbb{Z}[\sqrt{-n}]$.

Άσκηση 6. Πάρε n όπως στην Άσκηση 4. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι ο $n + 1$ δεν είναι πρώτος και ότι ο p είναι πρώτος διαιρέτης του $n + 1$.

1. Δείξτε ότι ο p δεν είναι πρώτο στοιχείο του $\mathbb{Z}[\sqrt{-n}]$.
2. Δείξτε ότι ο p είναι ανάγωγο στοιχείο του $\mathbb{Z}[\sqrt{-n}]$.

Άσκηση 7. Έστω $n > 2$ ακέραιος ελεύθερος τετραγώνων. Δείξτε ότι ο $\mathbb{Z}[\sqrt{-n}]$ δεν είναι περιοχή κυρίων ιδεωδών.

Άσκηση 8. Έστω R αντιμεταθετικός δακτύλιος με μονάδα. Δείξτε ότι ο

$$R[X]/\langle X^6 - X^5 + X - 1 \rangle$$

δεν είναι σώμα.

Άσκηση 9. 1. Βρείτε όλα τα γνήσια ιδεώδη $I \trianglelefteq \mathbb{Z}$, τέτοια ώστε $\langle 24 \rangle \subseteq I$. Ποιά από αυτά είναι μεγιστικά;

2. Βρείτε όλα τα γνήσια ιδεώδη $I \trianglelefteq \mathbb{Q}[x]$, τέτοια ώστε $\langle x^3 - 4x^2 + 5x - 2 \rangle \subseteq I$. Ποιά από αυτά είναι μεγιστικά;