UNIVERSITY OF CRETE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND APPLIED MATHEMATICS
APPLIED ALGEBRA - MEM244 (FALL SEMESTER 2019-20)
LECTURER: G. KAPETANAKIS

2nd set

Exercise 1. Show that a finite integral domain is a field.

Exercise 2. Let F be a field. Show that for every $f, g \in F[X]$ and $c \in F$:

1. $(f+g)' = f' + g'$.
2. $(cf)' = cf'$.
3. $(fg)' = f'g + fg'$.

Exercise 3. Let $\mathbb{F}_3$ be a finite field of 3 elements and take $f(X) = X^3 - X - 1 \in \mathbb{F}_3[X]$.

1. Show that f is irreducible over $\mathbb{F}_3$.
2. If α is a root of f, find the degree of the extension $\mathbb{F}_3(\alpha)/\mathbb{F}_3$ and two bases.
3. Show that $g(X) = X^3 - X + 1 \in \mathbb{F}_3[X]$ is irreducible over $\mathbb{F}_3$ and show that there exists a root of g in $\mathbb{F}_3(\alpha)$.
4. Show that $\mathbb{F}_3(\alpha)$ does not contain a root of $h(X) = X^2 + 1 \in \mathbb{F}_3[X]$.

Exercise 4. Prove that if θ is algebraic over L and the extension L/K is algebraic, then θ is algebraic over K.

Exercise 5. Show that if $[L : K] = p$, where p is prime and $K \subseteq F \subseteq L$ are fields, then $F = K$ or $F = L$.

Exercise 6. Determine all the primitive elements of $\mathbb{F}_7$ and $\mathbb{F}_9$.

Exercise 7. Find all the subfields of $\mathbb{F}_{5^{20}}$.

Exercise 8. Let $q = p^n$, where p is a prime. Show that the algebraic closure of $\mathbb{F}_q$ is an infinite field of characteristic p.

Exercise 9. Let $q > 3$ be a prime power. Show that

$$\sum_{a \in \mathbb{F}_q} a^2 = 0.$$

Hint: Prove that

$$\sum_{a \in \mathbb{F}_q} a = 0 \quad \text{and} \quad \sum_{\substack{a,b \in \mathbb{F}_q \\ a \neq b}} ab = 0$$

and combine the above facts.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΑΛΓΕΒΡΑ - ΜΕΜ244 (ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2018-19)
ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Γ. ΚΑΠΕΤΑΝΑΚΗΣ

2ο σετ ασκήσεων

Άσκηση 1. Δείξτε ότι μια πεπερασμένη ακέραια περιοχή είναι σώμα.

Άσκηση 2. Έστω F σώμα. Δείξτε ότι για κάθε $f, g \in F[X]$ και $c \in F$:

1. $(f+g)' = f' + g'$.
2. $(cf)' = cf'$.
3. $(fg)' = f'g + fg'$.

Άσκηση 3. Έστω $\mathbb{F}_3$ ένα πεπερασμένο σώμα 3 στοιχείων και $f(X) = X^3 - X - 1 \in \mathbb{F}_3[X]$.

1. Δείξτε ότι το f είναι ανάγωγο υπέρ του $\mathbb{F}_3$.
2. Εάν α είναι μία ρίζα του f, βρείτε τον βαθμό της επέκτασης $\mathbb{F}_3(\alpha)/\mathbb{F}_3$ και δύο βάσεις της.
3. Δείξτε ότι το $g(X) = X^3 - X + 1 \in \mathbb{F}_3[X]$ είναι ανάγωγο υπέρ του $\mathbb{F}_3$ και ότι υπάρχει ρίζα του g εντός του $\mathbb{F}_3(\alpha)$.
4. Δείξτε ότι το $\mathbb{F}_3(\alpha)$ δεν περιέχει ρίζα του $h(X) = X^2 + 1 \in \mathbb{F}_3[X]$.

Άσκηση 4. Δείξτε ότι αν το θ είναι αλγεβρικό πάνω από το L και η επέκταση L/K είναι αλγεβρική, τότε το θ είναι αλγεβρικό υπέρ του K.

Άσκηση 5. Δείξτε ότι αν $[L:K] = p$, όπου p πρώτος και $K \subseteq F \subseteq L$ σώματα, τότε $F = K$ ή $F = L$.

Άσκηση 6. Βρείτε όλα τα πρωταρχικά στοιχεία των $\mathbb{F}_7$ και $\mathbb{F}_9$.

Άσκηση 7. Βρείτε όλα τα υποσώματα του $\mathbb{F}_{5^{20}}$.

Άσκηση 8. Έστω $q = p^n$, όπου p πρώτος. Δείξτε ότι η αλγεβρική θήκη του $\mathbb{F}_q$ είναι ένα άπειρο σώμα χαρακτηριστικής p.

Άσκηση 9. Έστω $q > 3$ δύναμη πρώτου. Δείξτε ότι

$$\sum_{a \in \mathbb{F}_q} a^2 = 0.$$

Υπόδειξη: Δείξτε ότι

$$\sum_{a \in \mathbb{F}_q} a = 0 \quad \text{και} \quad \sum_{\substack{a,b \in \mathbb{F}_q \\ a \neq b}} ab = 0$$

και συνδυάστε τα παραπάνω.