UNIVERSITY OF CRETE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND APPLIED MATHEMATICS
APPLIED ALGEBRA - MEM244 (FALL SEMESTER 2019-20)
LECTURER: G. KAPETANAKIS

4th set

Exercise 1. For the ternary code $C = \{00122, 12201, 20110, 22000\}$, use the nearest neighbor decoding rule to decode the following words:
(a) 01122, (b) 10021, (c) 22022, (d) 20120.

Exercise 2. Determine the number of binary $(n, 2, n)$-codes, for $n \geq 2$.

Exercise 3. Determine the number of binary $[n, n-1, 2]$-codes, for $n \geq 2$.

Exercise 4. Determine the number of q-adic $[n, k]$-codes, where $k \leq n$.

Exercise 5. Let C_i, $i = 1, 2$ be linear codes over $\mathbb{F}_q$ with parameters $[n_i, k_i, d_i]$ respectively. The direct sum $C_1 \oplus C_2$ is a subspace of $\mathbb{F}_q^{n_1+n_2}$. Show that $C_1 \oplus C_2$ is an $[n_1 + n_2, k_1 + k_2, \min\{d_1, d_2\}]$ linear code over $\mathbb{F}_q$.

Exercise 6. Let C be a binary $[n, k, d]$-code, such that C contains at least one codeword of odd weight. Let

$$C' := \{c \in C \ : \ \mathrm{wt}(c) \text{ even}\}.$$

Show that C' is a binary $[n, k-1, d']$-code, where $d' > d$, if d is odd, and $d' = d$, if d is even.

Exercise 7.

1. Show that every codeword in a self-orthogonal binary code has even weight.
2. Show that every codeword in a self-orthogonal ternary code has weight divisible by 3.
3. Let x, y be codewords of a self-orthogonal binary code, such that both $\mathrm{wt}(x)$ and $\mathrm{wt}(y)$ are divisible by 4. Show that $4 \mid \mathrm{wt}(x + y)$.

Exercise 8. Let C be a self-dual binary $[n, k, d]$-code.

1. Show that $(1, 1, \ldots, 1) \in C$.
2. Show that either all the codewords of C have weight divisible by 4, or exactly half of them have weight divisible by 4.
3. Suppose $n = 6$. Determine d.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΑΛΓΕΒΡΑ - ΜΕΜ244 (ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2019-20)
ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Γ. ΚΑΠΕΤΑΝΑΚΗΣ

4ο σετ ασκήσεων

Άσκηση 1. Αποκωδικοποιήστε, σύμφωνα με την αρχή της πλησιέστερης λέξης στον 3-δικό κώδικα $C = \{00122, 12201, 20110, 22000\}$, τις παρακάτω λέξεις:
(a) 01122, (b) 10021, (c) 22022, (d) 20120.

Άσκηση 2. Βρείτε το πλήθος των δυαδικών $(n, 2, n)$-κωδίκων, για $n \geq 2$.

Άσκηση 3. Βρείτε το πλήθος των δυαδικών $[n, n-1, 2]$-κωδίκων, για $n \geq 2$.

Άσκηση 4. Βρείτε το πλήθος των q-δικών $[n, k]$-κωδίκων, όπου $k \leq n$.

Άσκηση 5. Έστω C_i, $i = 1, 2$ γραμμικοί κώδικες υπέρ του $\mathbb{F}_q$ με παραμέτρους $[n_i, k_i, d_i]$ αντίστοιχα. Το ευθύ άθροισμα $C_1 \oplus C_2$ είναι ένας υπόχωρος του $\mathbb{F}_q^{n_1+n_2}$. Δείξτε ότι το $C_1 \oplus C_2$ είναι ένας $[n_1+n_2, k_1+k_2, \min\{d_1, d_2\}]$ γραμμικός κώδικας υπέρ του $\mathbb{F}_q$.

Άσκηση 6. Έστω C δυαδικός $[n, k, d]$-κώδικας, τέτοιος ώστε ο C περιέχει τουλάχιστον μια λέξη περιττού βάρους. Αν

$$C' := \{c \in C \ : \ \mathrm{wt}(c) \text{ άρτιο}\},$$

δείξτε ότι το C' είναι ένας δυαδικός $[n, k-1, d']$-κώδικας, όπου $d' > d$, αν d περιττός, και $d' = d$, αν d άρτιος.

Άσκηση 7.
1. Δείξτε ότι κάθε κωδικολέξη ενός αυτοορθογώνιου δυαδικού κώδικα έχει άρτιο βάρος.
2. Δείξτε ότι το βάρος κάθε λέξης ενός αυτοορθογώνιου 3-δικού κώδικα, διαιρείται από το 3.
3. Έστω x, y κωδικολέξεις ενός αυτοορθογώνιου δυαδικού κώδικα, τέτοιες ώστε αμφότερα τα $\mathrm{wt}(x)$ και $\mathrm{wt}(y)$ διαιρούνται από το 4. Δείξτε ότι $4 \mid \mathrm{wt}(x+y)$.

Άσκηση 8. Έστω C αυτοδυϊκός δυαδικός $[n, k, d]$-κώδικας.

1. Δείξτε ότι $(1, 1, \ldots, 1) \in C$.
2. Δείξτε ότι είτε όλες οι κωδικολέξεις του C έχουν βάρος που διαιρείται από το 4, είτε ακριβώς οι μισές από αυτές έχουν βάρος που διαιρείται από το 4.
3. Αν $n = 6$, βρείτε το d.