

UNIVERSITY OF CRETE  
DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND APPLIED MATHEMATICS  
APPLIED ALGEBRA - MEM244 (FALL SEMESTER 2019-20)  
LECTURER: G. KAPETANAKIS

5th set

**Exercise 1.** Let  $C$  be the linear code over  $\mathbb{F}_9$  with parity-check matrix

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix},$$

where  $\alpha$  is a root of  $X^2 + 1 \in \mathbb{F}_3[X]$ . Find two non-zero codewords of  $C$  of minimum weight.

**Exercise 2.** Let  $G$  and  $G'$  be generator matrices of the linear code  $C$ . Show that if both  $G$  and  $G'$  are in standard form then  $G = G'$ .

**Exercise 3.** Construct a binary code  $C$  of length 6 as follows: for every  $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{F}_2^3$ , construct a 6-bit word  $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \in C$ , where

$$x_4 = x_1 + x_2 + x_3,$$

$$x_5 = x_1 + x_3,$$

$$x_6 = x_2 + x_3.$$

1. Show that  $C$  is a linear code.
2. Find a generator matrix and a parity-check matrix for  $C$ .
3. Decode the words  $w_1 = 111111$  and  $w_2 = 101010$ .

**Exercise 4.** Let  $C$  be the binary linear code with parity-check matrix

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Write a generator matrix of  $C$  and find the parameters of  $C$ . How many errors does  $C$  correct?
2. Decode the words  $w_1 = 110110$  and  $w_2 = 011011$ , using coset decoding.
3. Construct a syndrome look-up table and use it to decode the words  $w_3 = 100100$  and  $w_4 = 011101$ .

**Exercise 5.** Prove that  $A_2(5, 4) = B_2(5, 4) = 2$ .

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ  
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ  
ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΑΛΓΕΒΡΑ - ΜΕΜ244 (ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2019-20)  
ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Γ. ΚΑΠΕΤΑΝΑΚΗΣ

5ο σετ ασκήσεων

**Άσκηση 1.** Έστω  $C$  ο γραμμικός κώδικας υπέρ του  $\mathbb{F}_9$  με πίνακα ελέγχου

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix},$$

όπου  $\alpha$  ρίζα του  $X^2 + 1 \in \mathbb{F}_3[X]$ . Βρείτε δυο μη μηδενικές κωδικολέξεις του  $C$  ελάχιστου βάρους.

**Άσκηση 2.** Έστω  $G$  και  $G'$  γεννήτορες πίνακες του γραμμικού κώδικα  $C$ . Δείξτε ότι αν αμφότεροι οι  $G$  και  $G'$  είναι σε κανονική μορφή, τότε  $G = G'$ .

**Άσκηση 3.** Κατασκευάστε έναν δυαδικό κώδικα  $C$  μήκους 6 σύμφωνα με τον παρακάτω κανόνα: για κάθε  $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{F}_2^3$ , κατασκευάστε μια λέξη μήκους 6  $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \in C$ , όπου

$$x_4 = x_1 + x_2 + x_3,$$

$$x_5 = x_1 + x_3,$$

$$x_6 = x_2 + x_3.$$

1. Δείξτε ότι ο  $C$  είναι γραμμικός κώδικας.
2. Βρείτε έναν γεννήτορα πίνακα και έναν πίνακα ελέγχου του  $C$ .
3. Αποκωδικοποιήστε τις λέξεις  $w_1 = 111111$  και  $w_2 = 101010$ .

**Άσκηση 4.** Έστω  $C$  ο δυαδικός γραμμικός κώδικας με πίνακα ελέγχου τον

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Γράψτε έναν γεννήτορα πίνακα του  $C$  και βρείτε τις παραμέτρους του  $C$ . Πόσα λάθη διορθώνει ο  $C$ ;
2. Αποκωδικοποιήστε τις λέξεις  $w_1 = 110110$  και  $w_2 = 011011$ , με την χρήση συμπλόκων.
3. Κατασκευάστε έναν πίνακα αναζήτησης συνδρόμων και χρησιμοποιήστε τον για να αποκωδικοποιήσετε τις λέξεις  $w_3 = 100100$  και  $w_4 = 011101$ .

**Άσκηση 5.** Αποδείξτε ότι  $A_2(5, 4) = B_2(5, 4) = 2$ .