

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΩΔΙΚΟΠΟΙΗΣΗ - Α32 (ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2019-20)
ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Γ. ΚΑΠΕΤΑΝΑΚΗΣ

1ο σετ ασκήσεων

Άσκηση 1. Έστω C ένας δυαδικός (n, M, d) -κώδικας, όπου d περιττός. Θεωρούμε τον κώδικα C' που ορίζεται ως εξής:

$$C' = \left\{ (c_1, \dots, c_n, c_{n+1}) \in \mathbb{F}_2^{n+1} : (c_1, \dots, c_n) \in C, c_{n+1} = \sum_{i=1}^n c_i \right\}.$$

Δείξτε ότι ο C' είναι ένας δυαδικός $(n+1, M, d+1)$ -κώδικας.

Άσκηση 2. Δείξτε ότι το $X^2 + 1$ είναι ανάγωγο υπέρ του \mathbb{F}_{11} και καταλήξτε ότι το $\mathbb{F}_{11}[X]/\langle X^2 + 1 \rangle$ έχει 121 στοιχεία. Δείξτε επίσης ότι το $X^2 + X + 4$ είναι ανάγωγο υπέρ του \mathbb{F}_{11} και δείξτε ότι το $\mathbb{F}_{11}[X]/\langle X^2 + 1 \rangle$ είναι ισόμορφο με το $\mathbb{F}_{11}[X]/\langle X^2 + X + 4 \rangle$.

Άσκηση 3. Έστω α μια ρίζα του $X^2 + X + 1 \in \mathbb{F}_2[X]$. Λύστε το σύστημα

$$\begin{cases} \alpha x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + \alpha x_2 + (\alpha + 1)x_3 = 0, \\ x_1 + \alpha x_2 + x_3 = \alpha. \end{cases}$$

Άσκηση 4. Αν \mathbb{F}_q πεπερασμένο σώμα χαρακτηριστικής p , δείξτε ότι για κάποιο $f \in \mathbb{F}_q[X]$, ισχύει ότι $f' = 0$ αν και μόνο αν το f είναι p -στή δύναμη κάποιου πολυωνύμου του $\mathbb{F}_q[X]$.

Άσκηση 5. Έστω q δύναμη πρώτου και n θετικός ακέραιος. Δείξτε ότι για κάθε $x, y \in \mathbb{F}_q^n$, ισχύει ότι

$$\text{wt}(x) - \text{wt}(y) \leq \text{wt}(x + y) \leq \text{wt}(x) + \text{wt}(y).$$

Άσκηση 6. i Έστω $x, y \in \mathbb{F}_2^n$. Δείξτε ότι το $\text{wt}(x + y)$ είναι άρτιος αν και μόνο αν τα $\text{wt}(x), \text{wt}(y)$ είναι και τα δύο άρτια ή και τα δύο περιττά.

Υπόδ.: Αν $\text{supp}(x)$ είναι το στήριγμα του $x \in \mathbb{F}_2^n$, δηλαδή οι μη-μηδενικές συντεταγμένες του x , παρατηρήστε ότι $\text{wt}(x) = |\text{supp}(x)|$, $\text{wt}(y) = |\text{supp}(y)|$ και $\text{wt}(x + y) = |\text{supp}(x)| + |\text{supp}(y)| - 2|\text{supp}(x) \cap \text{supp}(y)|$.

ii Έστω C ένας δυαδικός γραμμικός κώδικας. Δείξτε ότι είτε όλα τα διάνυσματα του C έχουν άρτιο βάρος ή τα μισά έχουν άρτιο και τα μισά έχουν περιττό βάρος.

Άσκηση 7. Έστω C ένας αυτοδυσικός δυαδικός κώδικας με παραμέτρους $[n, k, d]$.

i Δείξτε ότι κάθε διάνυσμα του C έχει άρτιο βάρος.

- ii Δείξτε ότι το διάνυσμα $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$ ανήκει στον C .
- iii Δείξτε ότι είτε όλα τα διανύσματα του C έχουν βάρος πολλαπλάσιο του 4, ή ακριβώς τα μισά έχουν βάρος πολλαπλάσιο του 4 (και τα υπόλοιπα έχουν βάρος πολλαπλάσιο του 2, αλλά όχι του 4).
Υπόδ.: Δουλέψτε όπως στην προηγούμενη άσκηση. Τώρα που ο κώδικας είναι δυαδικός αυτοδυϊκός, μπορείτε να δείξετε ότι το $|\text{supp}(x) \cap \text{supp}(y)|$ είναι άρτιος αριθμός για κάθε $x, y \in C$.
- iv Για $n = 6$ υπολογίστε το d .