

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΩΔΙΚΟΠΟΙΗΣΗ - Α32 (ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2019-20)
ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Γ. ΚΑΠΕΤΑΝΑΚΗΣ

2ο σετ ασκήσεων

Άσκηση 1. Χωρίς την χρήση φραγμάτων, δείξτε ότι

$$A_2(6, 5) = 2 \quad \text{και} \quad A_2(7, 5) = 2.$$

Άσκηση 2. Δικαιολογήστε κατά πόσο υπάρχουν ή όχι δυαδικοί κώδικες με τις παρακάτω παραμέτρους και χαρακτηριστικά:

- i. $(8, 29, 3)$ -κώδικας.
- ii. γραμμικός $(8, 8, 5)$ -κώδικας.
- iii. γραμμικός $(8, 5, 5)$ -κώδικας.
- iv. γραμμικός $(24, 2^{12}, 8)$ -κώδικας.
- v. γραμμικός $(63, 2^{57}, 3)$ -κώδικας.

Άσκηση 3. i. Δείξτε ότι δεν υπάρχει δυαδικός $[2^m, 2^m - m, 3]$ -κώδικας, αν $m \geq 2$.

ii. Έστω C δυαδικός $[2^m, k, 4]$ -κώδικας. Δείξτε ότι $k \leq 2^m - m - 1$.

Άσκηση 4. Δείξτε ότι ο $\text{Ham}(r, q)$ είναι ένας q -δικός $\left[\frac{q^r-1}{q-1}, \frac{q^r-1}{q-1} - r, 3\right]$ -κώδικας.

Άσκηση 5. Θα υπολογίσουμε τις παραμέτρους του $S(r, q)$.

i. Έστω $v \in \mathbb{F}_q^r \setminus \{\mathbf{0}\}$. Δείξτε ότι το σύνολο

$$v^\perp = \{x \in \mathbb{F}_q^r : xv = 0\}$$

είναι υπόχωρος του \mathbb{F}_q^r διάστασης $r - 1$.

ii. Έστω G γεννήτορας πίνακας του κώδικα simplex $S(r, q)$. Δείξτε ότι αν $v \in \mathbb{F}_q^r \setminus \{\mathbf{0}\}$, τότε υπάρχουν ακριβώς $(q^{r-1}-1)/(q-1)$ στήλες του G κάθετες στο v .

iii. Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω, δείξτε ότι κάθε μη-μηδενική λέξη του $S(r, q)$ έχει βάρος q^{r-1} και καταλήξτε ότι ο $S(r, q)$ είναι ένας q -δικός $\left[\frac{q^r-1}{q-1}, r, q^{r-1}\right]$ -κώδικας.

Άσκηση 6. Έστω C ένας (n, M, d) κώδικας πάνω από το \mathbb{F}_q . Ορίζουμε την ακτίνα κάλυψης του C ως

$$\rho = \max_{x \in \mathbb{F}_q^n} \{d(x, C)\}, \quad \text{όπου} \quad d(x, C) = \min_{c \in C} d(x, c).$$

i. Δείξτε ότι $M \geq q^n / \sum_{i=0}^{\rho} \binom{n}{i} (q-1)^i$.

ii. Δείξτε ότι $\rho \geq (d-1)/2$.

Άσκηση 7. Έστω C ένας $[n, k]$ -κώδικας πάνω από το \mathbb{F}_q με πίνακα ελέγχου H και ακτίνα κάλυψης ρ .

i. Αποδείξτε ότι $\rho \leq t$ αν και μόνο αν κάθε διάνυσμα του \mathbb{F}_q^{n-k} γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός t στηλών του H (οι στήλες δεν είναι απαραίτητα οι ίδιες για όλα τα διανύσματα του \mathbb{F}_q^{n-k}).

ii. Υπολογίστε την ακτίνα κάλυψης των κωδίκων Hamming.

iii. Δείξτε ότι $\rho \leq n-k$.

iv. Δείξτε ότι $\rho \geq (n-k)/(1 + \log_q(n))$.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την Άσκηση 6.