ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΩΔΙΚΟΠΟΙΗΣΗ - Α32 (ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2019-20)
ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Γ. ΚΑΠΕΤΑΝΑΚΗΣ

3ο σετ ασκήσεων

Άσκηση 1. Για ποιά r και q είναι ο $\mathrm{Ham}(r,q)$ αυτοδυϊκός και για ποιά είναι MDS;

Άσκηση 2. Για κάθε δύναμη πρώτου q δώστε παραδείγματα q-δικών κωδίκων οι οποίοι είναι:

i. Τέλειοι αλλά όχι MDS.

ii. MDS αλλά όχι τέλειοι.

iii. Τέλειοι και MDS.

Άσκηση 3. i. Βρείτε τον απαριθμητή βάρους του $\mathrm{Ham}(r,q)$.

ii. Βρείτε τον απαριθμητή βάρους του $\overline{\mathrm{Ham}(r,q)}$.

Άσκηση 4. Αποδείξτε το φράγμα Plotkin για δυαδικούς, δηλαδή ότι:

i. Αν d άρτιο, τότε

$$A_2(n,d) \le \begin{cases} 2\left\lfloor \frac{d}{2d-n} \right\rfloor, & \text{αν } n < 2d, \\ 4d, & \text{αν } n = 2d. \end{cases}$$

ii. Αν d περιττό, τότε

$$A_2(n,d) \le \begin{cases} 2\left\lfloor \frac{d+1}{2d+1-n} \right\rfloor, & \text{αν } n < 2d+1, \\ 4d+4, & \text{αν } n = 2d+1. \end{cases}$$

Άσκηση 5. Θα αποδείξουμε τις *ταυτότητες MacWilliams*, χρησιμοποιώντας το θεώρημα MacWilliams. Έστω C ένας q-δικός $[n,k,d]$-κώδικας. Αν $W_C(x) = \sum_{i=0}^{n} W_i x^i$ και $W_{C^\perp}(x) = \sum_{i=0}^{n} W_i^\perp x^i$ οι απαριθμητές βάρους του C και του $C^\perp$ αντίστοιχα.

i. Δείξτε ότι για κάθε $0 \le \ell \le n$ ισχύει ότι

$$\sum_{i=0}^{n-\ell} \binom{n-i}{\ell} W_i^\perp = q^{n-k-\ell} \sum_{i=0}^{\ell} \binom{n-i}{\ell-i} W_i.$$

Υπόδειξη: Στο Θεώρημα MacWilliams πολλαπλασιάστε και τις δύο μεριές με x^{-n} και στην συνέχεια αντικαταστήστε το x με το $1/(x+1)$.

ii. Δείξτε ότι για κάθε $0 \leq \ell \leq n$ ισχύει ότι

$$\sum_{i=0}^{n-\ell} \binom{n-i}{\ell} W_i = q^{k-\ell} \sum_{i=0}^{\ell} \binom{n-i}{n-\ell} W_i^{\perp}.$$

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την ταυτότητα $\binom{n-i}{\ell-i} = \binom{n-i}{n-\ell}$.

Άσκηση 6. Βρείτε το ελάχιστο n, τέτοιο ώστε να υπάρχει

i. 2-δικός $[n, 50, 3]$-κώδικας και

ii. 9-δικός $[n, 40, 3]$-κώδικας.