

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΩΔΙΚΟΠΟΙΗΣΗ - Α32 (ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2019-20)
ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Γ. ΚΑΠΕΤΑΝΑΚΗΣ

50 σετ ασκήσεων

Αν C ένας κώδικας μήκους n , η ομάδα αυτομορφισμών (συμβ. $\text{Aut}(C)$) του C είναι οι μεταθέσεις των n στοιχείων, με την ιδιότητα ότι αν σε μια λέξη του C εφαρμόσουμε την αντίστοιχη μετάθεση συντεταγμένων παίρνουμε μια (ενδεχομένως διαφορετική) λέξη του C .

Άσκηση 1. Δείξτε ότι $\text{Aut}(C)$ υποομάδα της S_n .

Άσκηση 2. Δείξτε ότι αν C q -δικός κυκλικός μήκους n , με $(n, q) = 1$, τότε

- i. $\langle (1\ 2\ \dots\ n) \rangle \subseteq \text{Aut}(C)$,
- ii. $\pi_q : i \mapsto qi \pmod n \in \text{Aut}(C)$.

Έστω $\alpha \in \mathbb{F}_{q^m}$ πρωταρχικό και έστω C ένας q -δικός πρωταρχικός narrow-sense BCH μήκους $n = q^m - 1$ σχεδιασμένης απόστασης δ . Σε κάθε λέξη

$$(c_0, c_1, \dots, c_{n-1}, c_\infty) \in \overline{C},$$

όπου $(c_0, c_1, \dots, c_{n-1}) \in C$ και $c_\infty = -\sum_{i=0}^{n-1} c_i$, αντιστοιχούμε το πολυώνυμο

$$c(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_{n-1}x^{n-1} + c_\infty x^\infty.$$

Άσκηση 3. Αν ορίσουμε $1^\infty = 1$ και $\kappa^\infty = 0$ για κάθε $\kappa \in \mathbb{F}_{q^m} \setminus \{1\}$, δείξτε ότι

$$(c_0, \dots, c_{n-1}, c_\infty) \in \overline{C} \iff c(\alpha^i) = 0 \text{ για } i = 0, 1, \dots, \delta - 1.$$

Άσκηση 4. Με την βοήθεια της απεικόνισης

$$\mathbb{F}_{q^m} \rightarrow \{x^i, i = 0, \dots, q^m - 1, \infty\}, \alpha^i \mapsto x^i,$$

δείξτε ότι η αφινική ομάδα μεταθέσεων του \mathbb{F}_{q^m}

$$\text{AGL}(1, q^m) = \{P_{u,v} : \mathbb{F}_{q^m} \rightarrow \mathbb{F}_{q^m}, \alpha^i \mapsto u\alpha^i + v \mid u, v \in \mathbb{F}_{q^m}, u \neq 0\}$$

εμφυτεύεται στην $\text{Aut}(\overline{C})$. Καταλήξτε ότι $\text{Aut}(\overline{C})$ είναι μεταβατική, δηλαδή ότι για κάθε $\kappa, \lambda \in \{0, 1, \dots, n-1, \infty\}$ υπάρχει κάποιο $\sigma \in \text{Aut}(\overline{C})$ τέτοιο ώστε $\sigma(\kappa) = \lambda$.

Άσκηση 5. Δείξτε ότι ένας δυαδικός narrow-sense BCH έχει περιττή ελάχιστη απόσταση.